Théorème de Riemann
réarrangement

Leçon 223, 230

Ref XENS, analyse 1

Théorème

Soit $\sum a_n$ une série réelle semi CV, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ tq $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$

Preuve

- On note $A = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}$. Alors A et B sont infinis, car sinon $(a_n)_n$ serait de signe constant à partir d'un certain rang et semi CV $\Leftrightarrow$ ACV. Comme $\sum a_n$ n'est pas ACV, A et B sont infinis.
- ~~Or~~ ~~$\sum_{n \in A}^{+\infty}$~~ La famille $(a_n)_{n \in A}$ n'est pas sommable.

Si c'était le cas, alors en considérant $a_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n < 0 \\ a_n & \text{si } a_n \geq 0 \end{cases}$,

alors la série $\sum a_n^+$ est ACV donc CV.

Donc la série $\sum a_n - a_n^+$ est CV, et même ACV car elle de signe constant négatif.

Or $a_n = (a_n - a_n^+) + a_n^+$, donc $\sum a_n$ est ACV (somme de $\sum$ ACV). Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ACV, contradiction.

De même, $(a_n)_{n \in B}$ n'est pas sommable.

· On va maintenant construire notre application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence.

I. On pose $\sigma(0) = 0$.

H. Pour $n \geqslant 1$, deux cas se présentent :

i) si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} \leqslant \alpha$, on va ajouter un terme $\geqslant 0$, on pose $\sigma(n) = \min_{i \in A} \{ i,\ i \notin \{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\}\}$

$= $ le + petit entier $k \in A$ tq $k \neq \sigma(0), \dots, \sigma(n-1)$.

ii) Si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$, on ajoute un terme négatif, on prend $\sigma(n) = \min_{i \in B} \{ i \neq \sigma(0), \dots, \sigma(n-1) \}$.

Par construct°, elle est injective. Mq elle est surjective. Par l'absurde, si il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $N \notin \mathrm{Im}(\sigma)$.

On suppose par exemple que $N \in A$.

Alors, les $\sigma(k)$ dans A sont tous $\leqslant N$, ils sont donc en nombre fini. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0, \sigma(n) \in B$.

Ainsi, si $n \geqslant n_0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$.

Comme cette série est à termes négatifs (sauf pour un nombre fini de termes) et que ses sommes partielles sont minorées, elle CV. Donc la famille $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Or, à un nombre fini de termes près, $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la famille $(a_n)_{n \in B}$, qui elle n'est pas sommable. On a une contradiction. Donc σ est bijective.

• Il reste à mq $\sum a_{\sigma(n)}$ cverent de somme α.

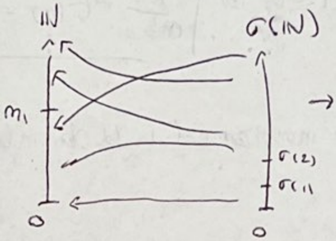
Soit $\varepsilon > 0$. $\sum a_n$ cv, donc $a_n \to 0$.

De plus $a_{\sigma(n)} \to 0$. En effet, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq n_1$, $|a_n| \leq \varepsilon$. Par injectivité de σ, il n'existe qu'un nbr

fini de $n \in \mathbb{N}$ tq $\sigma(n) \leq n_1$. Soit donc $n_0 > \max_k \{\sigma(k) \leq n_1\}$.

Alors si $n \geq n_0$, $\sigma(n) \geq n_1$, et $|a_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$.



→ les flèches arrivant en dessous n_1 sont en nbr fini.

• Les $\sigma(n)$ ne peuvent pas rester dans A (ou B), il existe donc un rang $N \geq n_0$ tq $\sigma(N) \in A$ et $\sigma(N+1) \in B$

On pose pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Soit $n \geq N$. Mq $|S_n - \alpha| \leq \varepsilon$.

Si $\sigma(N) \in A$, c'est que $S_{N-1} \leq \alpha$, et si $\sigma(N+1) \in B$, c'est que $S_N > \alpha$. Or $|S_N - S_{N-1}| = |a_{\sigma(N)}| \leq \varepsilon$ ($N \geq n_0$).

Donc $S_N \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Soit $n > N$. Imaginons que $S_n > \alpha + \varepsilon$. On passe de S_{n-1} à S_n avec un saut de longueur $a_{\sigma(n)} \leq \varepsilon$, donc on ne peut pas avoir $S_{n-1} \leq \alpha$.

Cela entraine $a_{\sigma(n)} < 0$, et finalement $S_{n-1} \geq S_n$.

(def de $\sigma(m)$).

De proche en proche, on obtient $\alpha+\varepsilon < S_m \leq S_{m-1} \leq \dots \leq S_N$, contradict. Donc $\boxed{S_m < \alpha+\varepsilon.}$

De même, si $S_m < \alpha - \varepsilon$, alors $a_{\sigma(m)} \geq 0 \Rightarrow S_{m-1} \leq S_m \Rightarrow \dots$

donc contradiction, $S_m > \alpha - \varepsilon$.

Ainsi, $\forall m \geq N$, $|S_m - \alpha| \leq \varepsilon$, et $\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} a_{\sigma(m)} = \alpha}$

□

Détaillons un exemple où la non-commutativité des indices perturbent la somme. [HaucRecorne].

- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} = -\ln(2)$
- On pose $a_m = (-1)^m/m$, $b_{3m} = a_{4m}$, $b_{3m+1} = a_{4m+2}$, $b_{3m+2} = a_{2m+1}$

On a: $\sum_{m=1}^{N} b_{3m} + \sum_{m=0}^{N} b_{3m+1} + \sum_{m=0}^{N} b_{3m+2}$

$= \frac{1}{4} H_N + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2m+1} - \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2m+1}$

$= \frac{1}{4} H_m - \frac{1}{2}\left(H_{2N+1} - \frac{1}{2} H_N\right)$

$= \frac{1}{2} H_m - \frac{1}{2} H_{2m+1} \rightarrow -\frac{\ln 2}{2}$ $\quad (H_m = \ln m + \gamma + o(1))$.

Théorème

Soit $(a_m)_m \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $\sum |a_m|$ CV $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S(\mathbb{N})$, $\sum a_{\sigma(m)}$ CV.

Dans ce cas, $\forall \sigma \in S(\mathbb{N})$, $\sum_{m=0}^{+\infty} a_{\sigma(m)} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$.

XENS Ana.